

Actividades IMCA de fin de año 2024

Rommel Andrés Bustinza Pariona

rbustinza@udec.cl

Universidad de Concepción, Chile

Cursillo: Introducción al método de elementos finitos

Resumen

El método de elementos finitos (MEF) constituye una importante técnica para aproximar la solución de problemas provenientes de la ingeniería: medios porosos, Stokes, elasticidad, Helmholtz, electromagnetismo, etc. Usualmente, éstos suelen ser modelados por ecuaciones en derivadas parciales, cuya solución si bien existe, no se conoce en general. El objetivo de este minicurso es dar una introducción a su teoría matemática, sin entrar en muchos detalles técnicos. Para esto, describiremos la filosofía del método cuando se aplica a un problema de segundo orden con valores de frontera, unidimensional. Posteriormente, analizaremos un modelo lineal, conocido como el PROBLEMA DE POISSON, definido en un dominio acotado del plano, con condiciones de contorno del tipo Dirichlet (pudiendo ser también de tipo Neumann y o mixtas). El marco teórico se basa en el estudio (existencia y unicidad de solución) de la formulación variacional asociada al problema, lo cual implica tener que trabajar con espacios de Sobolev. Para ello, requeriremos de herramientas de ANÁLISIS FUNCIONAL, como el Teorema de Lax-Milgram (para establecer existencia y unicidad). Asimismo, describiremos cómo podemos determinar la aproximación por elementos finitos, lo cual resulta de resolver un sistema (lineal) de ecuaciones. Identificaremos qué propiedades tiene la matriz del sistema, lo cual puede ser útil a la hora de decidir cómo se implementará y resolverá el sistema en el computador. Luego, discutiremos la convergencia del método, indicando el orden de convergencia optimal, asumiendo regularidad adicional de la solución. Ilustraremos esto con algunos ejemplos. Finalmente, si el tiempo lo permite, hablaremos también de lo que se conoce como el análisis de error a posteriori.

Referencias

- [1] GATICA, G.N. Introducción al Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones. Editorial Reverté, 2014,

texto de ANÁLISIS FUNCIONAL, enfocado en establecer resultados técnicos que suelen ser aplicados para el análisis numérico del método de elementos finitos.

Por otra parte,

- [2] BRENNER, S.; SCOTT, L.R. The mathematical theory of finite element methods. Springer-Verlag, 1994

contiene un enfoque moderno del análisis numérico del método de elementos finitos.

La referencia clásica para los matemáticos (aunque mucho más difícil de seguir) ha sido por muchos años:

- [3] CIARLET, P.G. The finite element method for elliptic problems. SIAM, 2002.

Una descripción del método de elementos finitos y sus aplicaciones al problema de Stokes, elasticidad, del calor, por ejemplo, puede encontrarse en

- [4] RAVIART, P.A.; THOMAS, J.M. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles. DUNOD, 1998,

- [5] BRAESS, D. Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics. Cambridge University Press, 1997 (3rd edition, 2007),

mientras que una introducción a este método en dimensión 1, se tiene en

- [6] SÜLI, E.; MAYERS, D. An introduction to Numerical Analysis. Cambridge, 2003.

Finalmente, pero no menos importante, los siguientes textos tratan sobre las estimaciones de error a posteriori

- [7] AINSWORTH, M.; ODEN, J.T. A posteriori error estimation in finite element analysis. Wiley-Interscience, 2000.

- [8] VERFÜRTH, R. A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques. Wiley-Teubner, 1996.

- [9] VERFÜRTH, R. A posteriori error estimation techniques for finite element methods. Oxford University Press, 2013.